

# Основные понятия теории разностных схем

## 1 Основные понятия

Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} Lu(x) = f(x), & x = (x_1, \dots, x_n) \in G, \\ lu(x) = \mu(x), & x \in \Gamma; \quad \bar{G} = G + \Gamma, \end{cases} \quad (1.1)$$

где  $L$  — дифференциальный оператор,  $l$  — оператор всех дополнительных условий (граничных и начальных). Пусть решение задачи ищется в некотором функциональном пространстве  $H_0$ . Если задачу (1.1) не удастся решить аналитически, то приходится искать ее приближенное решение. Одним из способов численного решения начально-краевых задач является метод конечных разностей. В методе конечных разностей численное решение строится не для всех значений аргумента  $x \in \bar{G}$ , а на некотором множестве точек, называемом *сеткой*. Сами точки, в которых ищется решение, называются *узлами сетки*.

Сетку в области  $\bar{G}$  будем характеризовать некоторым параметром  $h$  и обозначать  $\bar{\omega}_h$ . Множество всех узлов сетки, лежащих строго внутри  $G$ , будем обозначать  $\omega_h$  и называть внутренними, а множество узлов, попадающих на границу  $\Gamma$ , будем обозначать  $\gamma_h$  и называть граничными.

Если расстояние между соседними узлами одинаково для всей сетки, ее называют равномерной. В простейшем одномерном случае параметр  $h$  для равномерной сетки на отрезке — это расстояние между узлами (см. рис.1). Равномерная сетка на отрезке  $x \in [0, 1]$  с

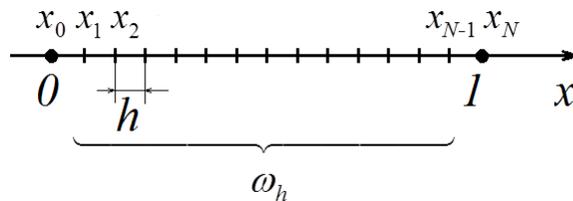


Рис. 1: Равномерная сетка на отрезке

шагом  $h$  имеет вид:

$$\bar{\omega}_h = \{x_k = hk, k = 0, 1, \dots, N, hN = 1\}.$$

В более общем многомерном случае параметр  $h = \{h_1, \dots, h_n\}$  — вектор, координаты которого представляют собой расстояния между узлами по какому-либо координатному направлению, причем  $|h| = (h_1^2 + \dots + h_n^2)^{1/2}$ .

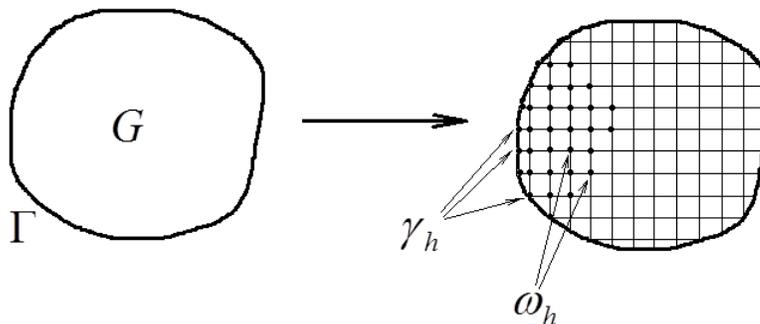


Рис. 2: Пример двумерной сетки

Функции, заданные на сетке, называют *сеточными* функциями:

$$y_h = y_h(x_k), \quad x_k \in \bar{\omega}_h.$$

Если мы перейдем от исходной задачи (1.1) для функции  $u(x) \in H_0$  к задаче для сеточной функции  $y_h$ , принадлежащей некоторому функциональному пространству  $H_h$ , то необходимо иметь возможность оценивать близость функций  $u(x)$  и  $y_h$ . Для этого можно использовать два подхода:

- 1) доопределение сеточной функции в точках, где она не задана, то есть  $y_h \Rightarrow \tilde{y}(x, h) \in H_0$ ;
- 2) проектирование функции  $u(x) \in H_0$  на сетку:  $u_h = \mathcal{P}_h u \in H_h$ , где  $\mathcal{P}$  — оператор, действующий из  $H_0$  в  $H_h$ .

Как правило, на практике используется второй подход. В простейшем случае можно взять  $u_h = \mathcal{P}_h u = u(x)$ ,  $x \in \bar{\omega}_h$ . Иногда для того, чтобы получить значения  $u_h$  в узлах сетки, используется усреднение по окрестности узла, например:

$$u_h(x) = \mathcal{P}_h u = \frac{1}{2h} \int_{x-h}^{x+h} u(t) dt = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 u(x + s \cdot h) ds.$$

Близость функций  $u_h$  и  $y_h$  будем оценивать по норме  $\|\cdot\|_h$  пространства  $H_h$ . При этом норму в пространстве  $H_h$  естественно вводить таким образом, чтобы выполнялось условие

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|\cdot\|_h = \|\cdot\|_0, \tag{1.2}$$

где  $\|\cdot\|_0$  — норма в пространстве  $H_0$ , в котором ищется решение исходной задачи (1.1). Условие (1.2) называется *условием согласования норм* в  $H_h$  и  $H_0$ .

Примеры сеточных норм.

1) Сеточный аналог равномерной нормы:

$$\|y_h\|_C = \max_{x \in \bar{\omega}_h} |y_h(x)|.$$

2) Сеточные аналоги нормы в  $L_2$  на отрезке  $[0, 1]$ :

$$\|y_h\| = \left( \sum_{k=1}^{N-1} y_k^2 h \right)^{1/2}, \quad \|y_h\| = \left( \sum_{k=1}^N y_k^2 h \right)^{1/2}, \quad \|y_h\| = \left( \sum_{k=0}^{N-1} y_k^2 h \right)^{1/2}.$$

Итак, перейдем от поиска функции  $u \in H_0$  к поиску сеточной функции  $y_h$ . Для этого операторы  $L$  и  $l$  необходимо заменить (аппроксимировать) их разностными аналогами  $L_h$  и  $l_h$ , а функции  $f(x)$  и  $\mu(x)$  в правых частях уравнения и дополнительных условий соответствующими сеточными функциями:  $f \Rightarrow \varphi_h$ ,  $\mu \Rightarrow \chi_h$ . В результате мы придем к системе алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} L_h y_h = \varphi_h(x), & x \in \omega_h, \\ l_h y_h(x) = \chi_h(x), & x \in \gamma_h. \end{cases} \quad (1.3)$$

**Определение 1.1** Семейство уравнений (1.3), зависящее от параметра  $h$ , называется разностной схемой (РС).

Основной вопрос: с какой точностью в зависимости от  $h$  сеточная функция  $y_h$  приближает  $u(x)$ ?

Далее будем рассматривать случай, когда  $L_h$  и  $l_h$  — линейные операторы. Введем погрешность схемы  $z_h = y_h - u_h$ . Тогда

$$\begin{cases} L_h z_h = \varphi_h - L_h u_h = (\varphi_h - f) - (L_h - L)u_h \equiv \psi_h, & x \in \omega_h, \\ l_h z_h = \chi_h - l_h u_h = (\chi_h - \mu) - (l_h - l)u_h \equiv \nu_h, & x \in \gamma_h. \end{cases}$$

**Определение 1.2** Говорят, что разностная схема (1.3)

1а) аппроксимирует задачу (1.1), если  $\|\psi_h\|_{(h2)} \rightarrow 0$  и  $\|\nu_h\|_{(h3)} \rightarrow 0$  при  $h \rightarrow 0$ ;

1б) имеет  $m$ -й порядок аппроксимации, если

$$\|\psi_h\|_{(h2)} = O(|h|^m), \quad \|\nu_h\|_{(h3)} = O(|h|^m);$$

2а) сходится, если  $\|y_h - u_h\|_{(h1)} \rightarrow 0$  при  $|h| \rightarrow 0$ ;

2б) имеет  $m$ -й порядок точности, если  $\|y_h - u_h\|_{(h1)} = O(|h|^m)$ .

Нормы  $\|\cdot\|_{(h1)}$ ,  $\|\cdot\|_{(h2)}$  и  $\|\cdot\|_{(h3)}$  вводятся в пространствах сеточных функций, заданных на  $\bar{\omega}_h$ ,  $\omega_h$  и  $\gamma_h$  соответственно.

**Определение 1.3** Разностная задача (1.3) называется поставленной корректно, если при всех достаточно малых  $|h| \leq h_0$ :

- 1) задача (1.3) однозначно разрешима для любых входных данных;
- 2) решения  $y_h$  равномерно по  $h$  непрерывно зависят от входных данных  $\varphi_h$  и  $\chi_h$ .

Свойство равномерной по  $h$  непрерывной зависимости решения  $y_h$  от  $\varphi_h$  и  $\chi_h$  называется *устойчивостью схемы* (1.3). Это означает, что при всех достаточно малых  $|h| \leq h_0$  найдутся такие числа  $M_1 > 0$  и  $M_2 > 0$ , не зависящие ни от  $h$ , ни от входных данных, что

$$\|y_h\|_{(h1)} \leq M_1 \|\varphi_h\|_{(h2)} + M_2 \|\chi_h\|_{(h3)}. \quad (1.4)$$

Если операторы  $L_h$  и  $l_h$  линейны, то из устойчивости схемы следует, что

$$\|z_h\|_{(h1)} = \|y_h - u_h\|_{(h1)} \leq M_1 \|\psi_h\|_{(h2)} + M_2 \|\nu_h\|_{(h3)}.$$

Таким образом, если *линейная* схема (1.3) устойчива и аппроксимирует исходную задачу (1.1), то она сходится. При этом порядок точности схемы определяется ее порядком аппроксимации.

## 2 Аппроксимация простейших дифференциальных операторов и уравнений

Рассмотрим примеры построения разностных операторов.

**Определение 2.1** Множество узлов сетки  $\bar{\omega}_h$ , на котором строится разностный оператор, называется его *шаблоном*.

Будем обозначать шаблон оператора в точке  $x \in \bar{\omega}_h$  как  $\Pi(x, h)$ . Линейный разностный оператор можно записать следующим образом:

$$L_h u_h(x) = \sum_{\xi \in \Pi(x, h)} A_h(x, \xi) u_h(\xi). \quad (2.1)$$

В качестве первого примера рассмотрим простейший дифференциальный оператор  $Lu = \frac{du}{dx}$ . Пусть в интересующей нас области введена равномерная сетка  $\bar{\omega}_h$  с шагом  $h$ . Тогда в произвольной внутренней точке  $x \in \omega_h$  разностные операторы, аппроксимирующие  $L$ , можно построить следующими способами:

$$L_h^+ u \equiv u_x \equiv \frac{u(x+h) - u(x)}{h}; \quad L_h^- u \equiv u_{\bar{x}} \equiv \frac{u(x) - u(x-h)}{h};$$

$$L_h^\sigma u \equiv \sigma u_x + (1 - \sigma) u_{\bar{x}}, \quad \sigma \in [0, 1];$$

$$L_h^{0.5}u \equiv u_{\dot{x}} \equiv 0.5(u_x + u_{\bar{x}}) = \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h}.$$

**Определение 2.2** Величина  $\psi(x) = L_h u(x) - Lu(x)$  называется погрешностью разностной аппроксимации  $Lu$  в точке  $x$ .

Оценим погрешность аппроксимации оператора  $Lu = \frac{du}{dx}$  приведенными выше разностными операторами. Пусть  $u(x)$  — достаточно гладкая функция. Так как в этом случае

$$u(x \pm h) = u(x) \pm hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) + O(h^3),$$

то

$$u_x = \frac{u(x+h) - u(x)}{h} = u'(x) + \frac{h}{2}u''(x) + O(h^2) \Rightarrow \psi(x) = u_x - u'(x) = O(h);$$

$$u_{\bar{x}} = \frac{u(x) - u(x-h)}{h} = u'(x) - \frac{h}{2}u''(x) + O(h^2) \Rightarrow \psi(x) = u_{\bar{x}} - u'(x) = O(h);$$

$$u_{\dot{x}} = \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} = u'(x) + O(h^2) \Rightarrow \psi(x) = u_{\dot{x}} - u'(x) = O(h^2).$$

**Определение 2.3** Пусть  $V$  — класс достаточно гладких функций  $u \in V$ , заданных в окрестности  $\Pi(x, h_0)$  точки  $x$ , содержащей при  $|h| < h_0$  шаблон  $\Pi(x, h)$  разностного оператора  $L_h$ . Будем говорить, что  $L_h$  аппроксимирует дифференциальный оператор  $L$  с порядком  $m > 0$  в точке  $x$ , если

$$\psi(x) = L_h u(x) - Lu(x) = O(|h|^m).$$

Таким образом, односторонние разностные производные  $u_x$  и  $u_{\bar{x}}$  аппроксимируют первую производную в точке  $x$  с первым порядком, а симметричная разностная производная  $u_{\dot{x}}$  — со вторым. Иногда бывает удобно использовать несимметричную первую разностную производную, аппроксимирующую  $u'(x)$  со вторым порядком точности:

$$\begin{aligned} L_h^\sigma u &= \sigma \frac{u(x+h) - u(x)}{h} + (1-\sigma) \frac{u(x+2h) - u(x+h)}{h} = \\ &= \frac{\sigma}{h} \left( u(x) + hu'(x) + \frac{h^2}{2}u''(x) + O(h^3) - u(x) \right) + \\ &+ \frac{1-\sigma}{h} \left( u(x) + 2hu'(x) + 2h^2u''(x) - u(x) - hu'(x) - \frac{h^2}{2}u''(x) + O(h^3) \right) = \\ &= u'(x) + \frac{h}{2}(3-2\sigma)u''(x) + O(h^2). \end{aligned}$$

Выбирая  $\sigma = 3/2$ , получаем

$$L_h^{3/2,+} u(x) = \frac{4u(x+h) - 3u(x) - u(x+2h)}{2h}, \quad \psi(x) = L_h^{3/2,+} u(x) - u'(x) = O(h^2).$$

Аналогично можно получить

$$L_h^{3/2,-} u(x) = \frac{3u(x) - 4u(x-h) + u(x-2h)}{2h}, \quad \psi(x) = L_h^{3/2,-} u(x) - u'(x) = O(h^2).$$

Рассмотрим теперь разностную аппроксимацию второй производной  $Lu = \frac{d^2 u}{dx^2}$ :

$$L_h u = \frac{u_x(x) - u_{\bar{x}}(x)}{h} = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} \equiv u_{\bar{x}x}.$$

При этом

$$u_{\bar{x}x} = u''(x) + \frac{h^2}{12} u^{IV}(x) + O(h^4); \quad \psi(x) = u_{\bar{x}x} - u''(x) = O(h^2).$$

**Пример 2.1.** Постройте разностную схему для краевой задачи

$$\begin{cases} Lu = u'' = -f(x), & 0 < x < 1; \\ u(0) = g_0, & u(1) = g_1. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Введем на отрезке  $[0, 1]$  равномерную сетку  $\bar{\omega}_h = \{x_i = ih; i = 0, 1, \dots, N; hN = 1\}$ .

Пусть  $\varphi(x) = f(x)$ ,  $x \in \omega_h$ . Тогда получим следующую разностную схему:

$$\begin{cases} y_{\bar{x}x} = -\varphi(x), & x \in \omega_h, \\ y_0 = g_0, & y_N = g_1, \end{cases}$$

или же, в явном виде:

$$\begin{cases} y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1} = -h^2 \varphi_i, & i = 1, 2, \dots, N-1, \\ y_0 = g_0, & y_N = g_1. \end{cases}$$

Рассмотрим погрешность аппроксимации схемы:

$$\psi(x) = \underbrace{-(\varphi - f)}_{=0} - \underbrace{(L_h - L)u_h(x)}_{=O(h^2)} = O(h^2);$$

Граничные условия в данном случае аппроксимируются точно. Следовательно, схема имеет второй порядок аппроксимации.

Заметим, что

$$u_{\bar{x}x} = u''(x) + \frac{h^2}{12} u^{(IV)}(x) + \frac{h^4}{360} u^{(VI)}(x + \theta h), \quad -1 \leq \theta \leq 1.$$

Если  $f(x)$  — дважды непрерывно дифференцируемая функция, то

$$u''(x) = -f(x) \Rightarrow u^{(IV)}(x) = -f''.$$

Следовательно, если  $f^{(k)}(x) = 0$  при  $k \geq 2$ , то есть  $f(x) = ax + b$  — линейная функция, то схема точно аппроксимирует исходную задачу. Погрешность аппроксимации в классе решений рассматриваемой задачи, где  $f(x)$  — линейная функция, равна нулю.

Если же  $f''(x) \neq 0$ , то погрешность аппроксимации имеет вид:

$$\psi = L_h u - Lu = -\frac{h^2}{12} f'' + O(h^4).$$

*Повышение порядка аппроксимации.*

Рассмотрим оператор:

$$\tilde{L}_h = u_{\bar{x}x} + \frac{h^2}{12} f''.$$

Погрешность аппроксимации в этом случае будет иметь вид:

$$\tilde{\psi} = \tilde{L}_h u - Lu = \frac{h^2}{12} f'' + O(h^4) - \frac{h^2}{12} f'' = O(h^4).$$

Следовательно, схема

$$\begin{cases} \tilde{L}_h u = -\varphi(x), & x \in \omega_h, \\ y_0 = g_0, & y_N = g_1, \end{cases}$$

или, что то же самое,

$$\begin{cases} L_h u = -\tilde{\varphi}(x), & x \in \omega_h, \\ y_0 = g_0, & y_N = g_1, \end{cases}$$

где  $\tilde{\varphi}(x_i) = f(x_i) + \frac{h^2}{12} f''(x_i)$ , аппроксимирует исходную задачу с четвертым порядком точности. Число узлов шаблона при этом не увеличивается.

Рассмотрим теперь более общий случай — краевую задачу для дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами:

$$\begin{cases} (k(x)u'(x))' - q(x)u(x) = -f(x), & 0 < x < 1; \\ -k(0)u'(0) + \sigma_0 u(0) = g_0, \\ k(1)u'(1) + \sigma_1 u(1) = g_1, \end{cases} \quad (2.2)$$

где  $k(x) \geq C > 0$  — непрерывно-дифференцируемая функция,  $q(x) \geq 0$  — непрерывная функция.

Аппроксимируем уравнение (2.2) на равномерной сетке  $\omega_h$ :

$$(k(x)u'(x))' \sim (ay_{\bar{x}})_{x,i} = \frac{1}{h} \left( a_{i+1} \frac{y_{i+1} - y_i}{h} - a_i \frac{y_i - y_{i-1}}{h} \right),$$

причем в случае достаточно гладкой функции  $u(x)$ :

$$\frac{u_{i+1} - u_i}{h} = u'_i + \frac{h}{2} u''_i + \frac{h^2}{6} u'''_i + O(h^3),$$

$$\frac{u_i - u_{i-1}}{h} = u'_i - \frac{h}{2}u''_i + \frac{h^2}{6}u'''_i + O(h^3).$$

Получим выражения для коэффициентов  $a_i$ . Если  $u(x)$  — гладкая функция, то

$$(au_{\bar{x}})_{x,i} = \frac{a_{i+1} - a_i}{h}u'_i + \frac{a_{i+1} + a_i}{2}u''_i + \frac{a_{i+1} - a_i}{6}hu'''_i + O(h^2)$$

причем

$$(ku')' = k'u' + ku''.$$

Естественно потребовать выполнения равенств:

$$\frac{a_{i+1} + a_i}{2} = k_i + O(h^2); \quad \frac{a_{i+1} - a_i}{h} = k'_i + O(h^2),$$

откуда получаем:

$$a_i = k_i - 0.5hk'_i + O(h^2), \quad a_{i+1} = k_i + 0.5hk'_i + O(h^2).$$

Возможные варианты выбора коэффициентов  $a_i$ :

$$a_i = k_{i-\frac{1}{2}} = k(x_i - 0.5h);$$

$$a_i = 0.5(k_i + k_{i-1});$$

$$a_i = 2 \left( \frac{1}{k_i} + \frac{1}{k_{i-1}} \right)^{-1} = \frac{2k_i k_{i-1}}{k_i + k_{i-1}}.$$

Итак, разностная аппроксимация уравнения (2.2) имеет вид:

$$(ay_{\bar{x}})_{x,i} - d_i y_i = -\varphi_i, \quad x \in \omega_h,$$

где  $d_i = q(x_i) + O(h^2)$ ,  $\varphi_i = f(x_i) + O(h^2)$ .

Аппроксимируем теперь граничные условия задачи (2.2). Пользуясь тем, что

$$a_i = k_i - 0.5hk'_i + O(h^2), \quad a_{i+1} = k_i + 0.5hk'_i + O(h^2),$$

и

$$\left. \begin{array}{l} u_{x,i} \\ u_{\bar{x},i} \end{array} \right\} = u'_i \pm \frac{h}{2}u''_i + \frac{h^2}{6}u'''_i + O(h^3),$$

получаем:

$$a_{i+1}u_{x,i} = k_i u'_i + 0.5h(k_i u'_i)' + O(h^2), \quad (2.3)$$

$$a_i u_{\bar{x},i} = k_i u'_i - 0.5h(k_i u'_i)' + O(h^2). \quad (2.4)$$

Рассмотрим выражение (2.3) при  $i = 0$ :

$$a_1 u_{x,0} = k_0 u'_0 + 0.5h \underbrace{(k_0 u'_0)'}_{q_0 u_0 - f_0} + O(h^2) \Rightarrow k_0 u'_0 = a_1 u_{x,0} - 0.5h(q_0 u_0 - f_0) + O(h^2).$$

Следовательно, в качестве аппроксимации граничного условия при  $x = 0$  можно взять равенство:

$$-a_1 y_{x,0} + (\sigma_0 + 0.5hq_0)y_0 = g_0 + 0.5hf_0.$$

Рассмотрим теперь равенство (2.4) при  $i = N$ :

$$a_N u_{\bar{x},N} = k_N u'_N - 0.5h \underbrace{(k_N u'_N)'}_{q_N u_N - f_N} + O(h^2) \Rightarrow k_N u'_N = a_N u_{\bar{x},N} + 0.5h(q_N u_N - f_N) + O(h^2).$$

В качестве аппроксимации граничного условия при  $x = 1$  можно взять равенство:

$$a_N y_{\bar{x},N} + (\sigma_1 + 0.5hq_N)y_N = g_1 + 0.5hf_N.$$

Итак, мы приходим к следующей разностной схеме, имеющей второй порядок аппроксимации на решении исходной задачи (2.2):

$$\begin{cases} (ay_{\bar{x}})_{x,i} - d_i y_i = -\varphi_i, & i = 1, 2, \dots, N-1; \\ -a_1 y_{x,0} + \tilde{\sigma}_0 y_0 = \tilde{g}_0, \\ a_N y_{\bar{x},N} + \tilde{\sigma}_1 y_N = \tilde{g}_1, \end{cases} \quad (2.5)$$

где  $\tilde{\sigma}_0 = \sigma_0 + 0.5hq_0$ ,  $\tilde{\sigma}_1 = \sigma_0 + 0.5hq_N$ ,  $\tilde{g}_0 = g_0 + 0.5hf_0$ ,  $\tilde{g}_1 = g_1 + 0.5hf_N$ .

Запишем полученную систему в матричном виде:  $A Y = \Phi$ , где  $Y = \{y_0, y_1, \dots, y_N\}^T$ ,  $\Phi = \left\{ \frac{\tilde{g}_0}{h}, \varphi_1, \dots, \varphi_{N-1}, \frac{\tilde{g}_1}{h} \right\}^T$ ,

$$A = \frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} a_1 + h\tilde{\sigma}_0 & -a_1 & 0 & \dots & 0 \\ -a_1 & a_1 + a_2 + h^2 d_1 & -a_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & -a_{N-1} & a_{N-1} + a_N + h^2 d_{N-1} & -a_N \\ 0 & \dots & 0 & -a_N & a_N + h\tilde{\sigma}_1 \end{bmatrix}.$$

Итак, мы пришли к системе линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей, структура которой представлена на рис.3

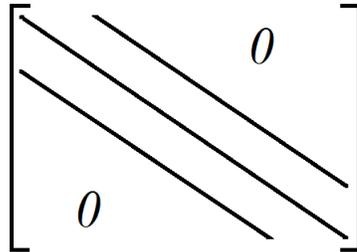


Рис. 3: Структура трехдиагональной матрицы

В качестве следующего примера рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения теплопроводности на отрезке:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t), \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T, \\ u(x, 0) = u_0(x), \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \sigma u(0, t) - \mu_0(t), \\ u(1, t) = \mu_1(t). \end{array} \right. \quad (2.6)$$

Введем в области  $\bar{D} = \{0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq t \leq T\}$  равномерную сетку

$$\overline{\omega_{h\tau}} = \overline{\omega_h} \times \overline{\omega_\tau} = \{(x_i, t_j) \in \bar{D}\},$$

где  $\overline{\omega_h} = \{x_i = ih; i = 0, 1, \dots, N_1, hN_1 = 1\}$ ,  $\overline{\omega_\tau} = \{t_j = j\tau; j = 0, 1, \dots, N_2, \tau N_2 = T\}$ .

*Вариант 1.* Для аппроксимации оператора в уравнении (2.6) используем шаблон, приведенный на рис. 4.

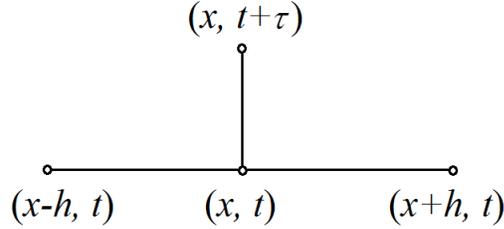


Рис. 4: Шаблон явной схемы для уравнения теплопроводности

Тогда разностный оператор запишется следующим образом:

$$L_{h\tau}^{(0)} u = \frac{u(x, t + \tau) - u(x, t)}{\tau} - \frac{u(x + h, t) - 2u(x, t) + u(x - h, t)}{h^2}.$$

Далее для краткости будем использовать следующие обозначения:

$$u = u(x, t); \quad \hat{u} = u(x, t + \tau); \quad \check{u} = u(x, t - \tau).$$

Тогда:

$$u_t = \frac{\hat{u} - u}{\tau}, \quad L_{h\tau}^{(0)} u = u_t - u_{\bar{x}x}.$$

*Вариант 2.* Используем для аппроксимации оператора  $L = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$  шаблон, приведенный на рис. 5.

Тогда разностная аппроксимация оператора уравнения теплопроводности будет выглядеть следующим образом:

$$L_{h\tau}^{(1)} u = \frac{u(x, t + \tau) - u(x, t)}{\tau} - \frac{u(x + h, t + \tau) - 2u(x, t + \tau) + u(x - h, t + \tau)}{h^2} = u_t - \hat{u}_{\bar{x}x}.$$

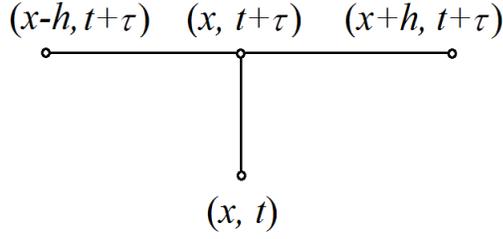


Рис. 5: Шаблон неявной схемы для уравнения теплопроводности

*Вариант 3.* Наконец, используем шаблон, приведенный на рис. 6 и линейную комбинацию  $L_{h\tau}^{(0)}$  и  $L_{h\tau}^{(1)}$  для аппроксимации оператора  $L$ :

$$L_{h\tau}^{(\sigma)} u = u_t - (\sigma \hat{u}_{\bar{x}x} + (1 - \sigma) u_{\bar{x}x}).$$

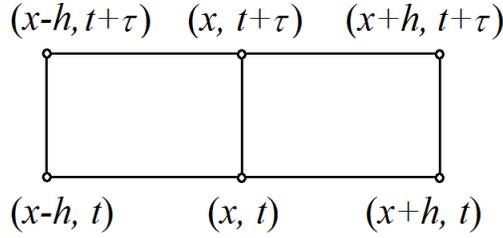


Рис. 6: Шаблон неявной схемы для уравнения теплопроводности

Найдем порядок аппроксимации указанными разностными операторами дифференциального оператора  $L = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$ . Так как

$$\begin{aligned} u_t &= \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) + O(\tau^2) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, t + \frac{\tau}{2}) + O(\tau^2), \\ \left\{ \begin{array}{l} \hat{u}_{\bar{x}x} \\ u_{\bar{x}x} \end{array} \right\} &= \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t + \tau) + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x, t + \tau) + O(h^4) \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}(x, t) + O(h^4) \end{array} \right\} = \\ &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t + \frac{\tau}{2}) \pm \frac{\tau}{2} \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t}(x, t + \frac{\tau}{2}) + O(h^2 + \tau^2), \end{aligned}$$

то погрешности аппроксимации оператора имеют вид:

$$\begin{aligned} \psi^{(0)} &= L_{h\tau}^{(0)} u - Lu = O(h^2 + \tau); \quad \psi^{(1)} = L_{h\tau}^{(1)} u - Lu = O(h^2 + \tau); \\ \psi^{(0.5)} &= L_{h\tau}^{(0.5)} u - Lu(x, t + \frac{\tau}{2}) = O(h^2 + \tau^2). \end{aligned}$$

Рассмотрим теперь граничные условия задачи. При  $x = 1$  поставлено условие Дирихле, которое аппроксимируется на сетке точно. Аппроксимируем со вторым порядком по координате граничное условие при  $x = 0$ :

$$u_{x,0} = \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) + \frac{h}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, t) + O(h^2).$$

Рассмотрим предел уравнения (2.6) при  $x \rightarrow 0$ :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(0, t) = \frac{\partial u}{\partial t}(0, t) - f(0, t) \Rightarrow u_{x,0} - \frac{h}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial t}(0, t) - f(0, t) \right) = \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) + O(h^2).$$

Заменяя производную  $\frac{\partial u}{\partial t}(0, t)$  конечной разностью:

$$u_{t,0} = \frac{1}{\tau} (u(0, t + \tau) - u(0, t)),$$

получим

$$u_{x,0} - \frac{h}{2} (u_{t,0} - f(0, t)) = \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) + O(h^2 + \tau).$$

*Явная схема* для задачи (2.6):

$$\begin{cases} y_t = y_{\bar{x}x} + \varphi, & (x, t) \in \omega_{h\tau}; \\ y(x, 0) = u_0(x), & x \in \bar{\omega}_h; \\ y_{x,0} = 0.5hy_{t,0} + \sigma y_0 - \tilde{\mu}_0, & t \in \bar{\omega}_\tau; \\ y(1, t) = \mu_1(t), & t \in \bar{\omega}_\tau; \end{cases} \quad (2.7)$$

где  $\varphi = \varphi_i^j = f(x_i, t_j)$ ,  $\tilde{\mu}_0(t) = \mu_0(t) + 0.5hf(0, t)$ . Погрешность аппроксимации на решении задачи (2.6):  $O(h^2 + \tau)$ .

*Неявная схема* для задачи (2.6):

$$\begin{cases} y_t = \hat{y}_{\bar{x}x} + \varphi, & (x, t) \in \omega_{h\tau}; \\ y(x, 0) = u_0(x), & x \in \bar{\omega}_h; \\ \hat{y}_{x,0} = 0.5hy_{t,0} + \sigma \hat{y}_0 - \hat{\mu}_0, & t \in \bar{\omega}_\tau; \\ y(1, t) = \mu_1(t), & t \in \bar{\omega}_\tau; \end{cases} \quad (2.8)$$

где  $\varphi = \varphi_i^j = f(x_i, t_j)$ ,  $\hat{\mu}_0(t) = \mu_0(t + \tau) + 0.5hf(0, t)$ . Погрешность аппроксимации на решении задачи (2.6):  $O(h^2 + \tau)$ .

### 3 Метод прогонки

В рассмотренных выше примерах разностных схем возникали системы алгебраических уравнений с трехдиагональными матрицами:

$$\begin{cases} A_n y_{n-1} - C_n y_n + B_n y_{n+1} = -F_n, & n = 1, 2, \dots, N-1, \\ y_0 = \varkappa_1 y_1 + \mu_1, \\ y_N = \varkappa_2 y_{N-1} + \mu_2. \end{cases} \quad (3.1)$$

Пусть  $A_n \neq 0$  и  $B_n \neq 0$  при  $n = 1, 2, \dots, N-1$ . Используем для решения системы метод Гаусса, который заключается в том, чтобы в результате линейных преобразований перейти

к эквивалентной системе с треугольной (например, верхне-треугольной) матрицей. В данном случае мы должны перейти от системы (3.1) с трехдиагональной матрицей к системе с двухдиагональной матрицей:

$$\begin{cases} y_n = \alpha_n y_{n+1} + \beta_n, & n = 0, 2, \dots, N-1, \\ y_N = \beta_N. \end{cases} \quad (3.2)$$

Прежде всего, найдем коэффициенты  $\alpha_n$  и  $\beta_n$  в преобразованной системе (3.2). Заметим, что первое уравнение системы (3.1), соответствующее  $n = 0$ , уже имеет нужный вид:

$$y_0 = \varkappa_1 y_1 + \mu_1 \Leftrightarrow y_0 = \alpha_0 y_1 + \beta_0 \Rightarrow \alpha_0 = \varkappa_1, \beta_0 = \mu_1.$$

Рассмотрим теперь уравнения системы (3.1), соответствующие  $n = 1, 2, \dots, N-1$ :

$$y_{n-1} = \alpha_{n-1} y_n + \beta_{n-1} = \alpha_{n-1} \alpha_n y_{n+1} + \alpha_{n-1} \beta_n + \beta_{n-1} \Rightarrow$$

$$(\alpha_n (A_n \alpha_{n-1} - C_n) + B_n) y_{n+1} + (\beta_n (A_n \alpha_{n-1} - C_n) + A_n \beta_{n-1} + F_n) = 0, \quad n = 1, 2, \dots, N-1$$

$$\Rightarrow \alpha_n (A_n \alpha_{n-1} - C_n) + B_n = 0, \quad \beta_n (A_n \alpha_{n-1} - C_n) + A_n \beta_{n-1} + F_n = 0 \Rightarrow$$

$$\alpha_n = \frac{B_n}{C_n - A_n \alpha_{n-1}}; \quad \beta_n = \frac{A_n \beta_{n-1} + F_n}{C_n - A_n \alpha_{n-1}}; \quad n = 1, 2, \dots, N-1. \quad (3.3)$$

Вычисление коэффициентов  $\alpha_n, \beta_n$  по рекуррентным формулам (3.3) называется *прямым ходом* прогонки. Будем считать, что все коэффициенты в преобразованной системе (3.2) найдены. Рассмотрим уравнение при  $n = N-1$ :

$$\begin{cases} y_{N-1} = \alpha_{N-1} y_N + \beta_{N-1} \\ y_N = \varkappa_2 y_{N-1} + \mu_2 \end{cases} \Rightarrow y_N = \frac{\mu_2 + \varkappa_2 \beta_{N-1}}{1 - \varkappa_2 \alpha_{N-1}}.$$

Обратный ход прогонки:

$$y_N = \beta_N = \frac{\mu_2 + \varkappa_2 \beta_{N-1}}{1 - \varkappa_2 \alpha_{N-1}};$$

$$y_n = \alpha_n y_{n+1} + \beta_n, \quad n = N-1, N-2, \dots, 0.$$

Достаточные условия устойчивости прогонки:

$$\begin{aligned} |C_n| &\geq |A_n| + |B_n|, \quad n = 1, 2, \dots, N-1; \\ |\varkappa_p| &\leq 1, \quad p = 1, 2; \quad |\varkappa_1| + |\varkappa_2| < 2. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Докажем по индукции, что если выполнены условия (3.4), то  $|\alpha_n| \leq 1$  для всех  $n = 0, 1, \dots, N-1$ . В самом деле:

$$|\alpha_0| = |\varkappa_1| \leq 1.$$

Пусть  $|\alpha_{n-1}| \leq 1$ . Из условий (3.4) следует, что

$$\begin{aligned} |C_n - A_n \alpha_{n-1}| - |B_n| &\geq |C_n| - |\alpha_{n-1}| |A_n| - |B_n| \geq |A_n| (1 - |\alpha_{n-1}|) \geq 0 \Rightarrow \\ |C_n - A_n \alpha_{n-1}| &\geq |B_n| \Rightarrow |\alpha_n| = \frac{|B_n|}{|C_n - A_n \alpha_{n-1}|} \leq 1. \end{aligned}$$

Покажем, что если  $|\alpha_{n-1}| < 1$ , то и  $|\alpha_n| < 1$ . В самом деле, если  $|\alpha_{n-1}| < 1$ , то

$$|C_n - \alpha_{n-1} A_n| > |B_n| \Rightarrow |\alpha_n| < 1.$$

Если выполнены условия (3.4), то  $1 - \alpha_{N-1} \varkappa_2 \neq 0$ , то есть  $y_N$  определено:

$$\text{а) } |\varkappa_2| < 1 \Rightarrow |\varkappa_1| \leq 1 \Rightarrow |\alpha_0| \leq 1 \Rightarrow |\alpha_{N-1}| \leq 1 \Rightarrow$$

$$|1 - \alpha_{N-1} \varkappa_2| \geq 1 - |\alpha_{N-1}| |\varkappa_2| \geq 1 - |\varkappa_2| > 0;$$

$$\text{б) } |\varkappa_2| \leq 1 \Rightarrow |\varkappa_1| < 1 \Rightarrow |\alpha_0| < 1 \Rightarrow |\alpha_{N-1}| < 1 \Rightarrow$$

$$|1 - \alpha_{N-1} \varkappa_2| \geq 1 - |\alpha_{N-1}| |\varkappa_2| \geq 1 - |\alpha_{N-1}| > 0.$$

При  $|\alpha_n| \leq 1$  возникающая при численном решении ошибка  $\delta y_{n+1} = \tilde{y}_{n+1} - y_{n+1}$  округления не возрастает:

$$y_n = \alpha_n y_{n+1} + \beta_n, \quad \tilde{y}_n = \alpha_n \tilde{y}_{n+1} + \beta_n \Rightarrow \delta y_n = \alpha_n \delta y_{n+1} \Rightarrow |\delta y_n| = |\alpha_n| |\delta y_{n+1}| \leq |\delta y_{n+1}|.$$

Если коэффициенты  $\alpha_n, \beta_n$  возмущаются, то  $\max_{1 \leq n \leq N} |\delta y_n| \approx \varepsilon_0 N^2$ , где  $\varepsilon_0$  — ошибка округления.

**Замечание 3.1** Если все коэффициенты  $A_n, B_n$  и  $C_n$  в системе (3.1) одного знака, то условия устойчивости прогонки (3.4) можно ослабить:

$$\begin{aligned} A_n > 0; B_n > 0; C_n \geq A_n + B_n; C_n \neq A_n + B_n; \quad n = 1, 2, \dots, N-1; \\ 0 \leq \varkappa_p \leq 1, \quad p = 1, 2. \end{aligned} \tag{3.5}$$

Число арифметических операций прогонки  $O(N)$ .

## 4 Задания для самостоятельного решения

1) Постройте разностные односторонние производные, аппроксимирующие  $u'(x)$  на неравномерной сетке  $\bar{\omega} = \{x_i, i = 0, 1, \dots, N, x_0 = 0, x_N = 1\}$ .

2) Постройте разностную аппроксимацию второй производной  $u''(x)$  на неравномерной сетке  $\bar{\omega} = \{x_i, i = 0, 1, \dots, N, x_0 = 0, x_N = 1\}$ .

3) Решите численно краевую задачу

$$\begin{cases} u'' = -f(x), & 0 < x < 1; \\ u(0) = 3, & u(1) = 5. \end{cases}$$

в случае: а)  $f = 6x + 2$ , б)  $f = e^x$ . Сравните численное решение с аналитическим. В случае б) используйте также процедуру повышения порядка точности.

4) Решите численно краевую задачу

$$\begin{cases} u'' + 4u = -f(x), & 0 < x < 1; \\ u(0) = 0, & u(1) = 5. \end{cases}$$

в случае: а)  $f = x - 1$ , б)  $f = \sin x$ . Сравните численное решение с аналитическим. В случае б) используйте также процедуру повышения порядка точности.

5) Решите численно задачу

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + e^t, & x \in (0, 1), t \in (0, 1]; \\ u(x, 0) = x + \sin \frac{\pi x}{2}, & x \in [0, 1]; \\ u(0, t) = 0, & \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = 1 \end{cases}$$

с помощью явной схемы со вторым порядком точности, соблюдая при построении сетки условие  $\tau \leq \frac{h^2}{2}$ . Сравните численное решение с аналитическим.